

1. Prüfungsklausur
Stochastik für Informatiker und Lehramtsstudierende
Wintersemester 2019/2020

Beachten Sie folgende Hinweise

- Zeit: 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus 8 Aufgaben auf jeweils einer eigenen Seite, dahinter einer weiteren Seite mit 2 Tabellen zur Standardnormalverteilung und schließlich noch 4 zusätzlichen Seiten zum weiteren Bearbeiten von Aufgabenteilen. Die Klammerung darf nicht gelöst werden!
- Zugelassen als Hilfsmittel ist ein einseitig handbeschriebenes Blatt DIN A4. (Jedoch keine elektronischen Geräte, Taschenrechner, etc.)
- Werden zu einer Aufgabe zwei Lösungen angegeben oder ist die Lösung nicht eindeutig, so wird die schlechtere von beiden gewertet.
- Die Rechnungen sind in lesbarer Schrift unter den Aufgabenstellungen bzw. auf der Rückseite auszuführen. Alle zur Lösung der Aufgabe notwendigen Rechenschritte müssen aufgeschrieben werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift!

Vor- und Nachname des Studierenden (**Blockschrift**):

Matrikelnummer: _____

Studiengang: _____

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
maximale Punkte	5	6	6	7	8	4	6	8	50
erreichte Punkte									

Klausurnote:

Bonus:

Endnote:

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es werden zwei faire sechsseitige Würfel hintereinander geworfen.

- (a) Konstruieren Sie einen entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, der dieses Experiment beschreibt. Begründen Sie Ihre Antwort!
- (b) Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der 6en.
 - (i) Geben Sie X als mathematisches Objekt explizit an.
 - (ii) Bestimmen Sie die Verteilung von X . Begründen Sie ihre Antwort vollständig.

Lösung:

- (a) Die beiden Würfelwürfe sind unabhängig und uniform auf $\{1, \dots, 6\}$ verteilt. (Oder irgendeine ähnliche sinnvolle Begründung.) 0.5
 $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ 1
 $\mathcal{A} = \text{Pot } \Omega$ 0.5
 $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{6^2}, \quad A \in \mathcal{A}$ 1
- (b) (i) $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega = (\omega_1, \omega_2) \mapsto |\{i \in \{1, 2\} : \omega_i = 6\}|$ 1
(ii) $\text{Bin}(2, 1/6)$. 1

Aufgabe 2 (6 Punkte)

An einer Universität wurde eine Klausur geschrieben und die Studierenden mittels zusätzlichem Fragebogen zu ihrer Vorbereitung auf die Klausur befragt. Insgesamt haben 75% der Klausurteilnehmer*innen die Klausur bestanden. Durch den Fragebogen konnte dies spezifiziert werden. Einige Studierende hatten sich durch regelmäßige Beteiligung an den Übungen auf die Klausur vorbereitet. Diese hatten eine Bestehensquote von 90%. Ein Anteil von $\frac{1}{5}$ der Klausurteilnehmer*innen hat die Übungsaufgaben nicht regelmäßig bearbeitet, dafür aber vor der Klausur mehrere Tage intensiv gelernt. Von diesen Teilnehmer*innen hat immerhin die Hälfte die Klausur bestanden. 10% der Klausurteilnehmer gaben an, dass sie weder die Übungsaufgaben regelmäßig bearbeitet hatten, noch sich in den Tagen vor der Klausur intensiv vorbereitet hatten.

- (a) Bestimmen Sie die Bestehensquote derjenigen Klausurteilnehmer*innen, die weder Übungsaufgaben bearbeitet, noch intensiv gelernt hatten.
- (b) Nun wählen Sie unter den Klausurteilnehmer*innen, die die Klausur bestanden haben, zufällig einen aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Person weder Übungszettel bearbeitet noch intensiv gelernt?

Lösung:

Sei:

B: Klausur bestanden, A: Übungsaufgaben bearbeitet, L: Intensiv gelernt.

Aus dem Text folgt $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}(B|A) = \frac{9}{10}$, $\mathbb{P}(A^c \cap L) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(B|A^c \cap L) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A^c \cap L^c) = \frac{1}{10}$.

Da $1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap L) + \mathbb{P}(A^c \cap L^c)$ folgt $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$. 2

- (a) Gesucht ist $\mathbb{P}(B|A^c \cap L^c)$. Mit dem Satz von der totalen WK folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c \cap L) + \mathbb{P}(B \cap A^c \cap L^c) \\ &= \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c \cap L) \cdot \mathbb{P}(A^c \cap L) + \mathbb{P}(B|A^c \cap L^c) \cdot \mathbb{P}(A^c \cap L^c).\end{aligned}$$

Umstellen liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|A^c \cap L^c) &= \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B|A^c \cap L) \cdot \mathbb{P}(A^c \cap L)}{\mathbb{P}(A^c \cap L^c)} \\ &= \frac{\frac{3}{4} - \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{10} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{10}} = \frac{75 - 63 - 10}{10} = \frac{2}{10}. \quad \boxed{3}\end{aligned}$$

- (b) Gesucht ist $\mathbb{P}(A^c \cap L^c|B)$. Nach Bayes gilt

$$\mathbb{P}(A^c \cap L^c|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A^c \cap L^c) \cdot \mathbb{P}(A^c \cap L^c)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{75}. \quad \boxed{1}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben sei ein diskreter Zufallsvektor (X, Y) mit Werten in $\{-1, 0, 1\} \times \{0, 1, 2\}$, dessen Verteilung durch folgende Tabelle gegeben ist:

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0	0.3	0.1
0	0	0	0
1	0.2	0.2	0.2

- (a) Berechnen Sie die Randverteilung von X und Y .
- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .
- (c) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie ihre Antwort.
- (d) Berechnen Sie $\mathbb{E}[e^{X \cdot Y}]$.

Lösung:

(a)

$$f_X(n) = \begin{cases} 0.4, & n = -1, \\ 0, & n = 0, \\ 0.6, & n = 1, \end{cases} \quad f_Y(n) = \begin{cases} 0.2, & n = 0, \\ 0.5, & n = 1, \\ 0.3, & n = 2, \end{cases} \quad \boxed{1}$$

(b)

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=-1}^1 n \cdot f_X(n) = (-1) \cdot 0.4 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0.6 = 0.2 \quad \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = (-1)^2 \cdot 0.4 + 0^2 \cdot 0 + 1^2 \cdot 0.6 - 0.2^2 \\ &= 1 - 0.04 = 0.96. \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

(c) Nein, z.B. $\mathbb{P}(X = -1) \cdot P(Y = 0) > 0 = \mathbb{P}(X = -1, Y = 0)$. $\boxed{1}$

(d) $\mathbb{E}[e^{X \cdot Y}] = .1e^{-2} + .3e^{-1} + .2 + .2e + .2e^2$ $\boxed{2}$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Gegeben sei die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x < c, \\ 0, & x \geq c. \end{cases}$$

einer reellwertigen Zufallsvariable X , wobei $c > 0$ eine reelle Zahl ist.

- (a) Bestimmen Sie die reelle Zahl $c > 0$ so, dass f tatsächlich die Dichte einer reellen Zufallsvariablen ist.
- (b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X .
- (c) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X \geq 1)$.
- (d) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ von X .

Lösung:

(a)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^c x dx = c^2/2 \implies c = \sqrt{2}. \quad \boxed{2}$$

(b) $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2/2, & 0 < x < \sqrt{2}, \\ 1, & x \geq \sqrt{2}. \end{cases} \quad \boxed{1}$$

(c) $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) + \mathbb{P}(X = 1) = 1 - F(1) = 1/2. \quad \boxed{2}$

(d)

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^c x^2 dx = c^3/3 = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad \boxed{2}$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Ein fairer Würfel werde 180-mal unabhängig voneinander geworfen.

- (a) Verwenden Sie die Normalapproximation, um näherungsweise die Wahrscheinlichkeit für mindestens 25 und höchstens 35 Würfe mit der Augenzahl 6 zu berechnen.
- (b) Formulieren Sie die Ungleichung von Chebyshev für Zufallsvariablen endlicher Varianz und berechnen Sie mit dieser ein $\delta \in \mathbb{N}$ möglichst klein, so dass die Wahrscheinlichkeit für mindestens $30 - \delta$ und höchstens $30 + \delta$ Würfe mit der Augenzahl 6 mindestens 96% beträgt.

Lösung:

- (a) Sei $n := 180$, $p := 1/6$ und $X_i \sim \text{Ber}(p)$ die unabhängigen Zufallsvariablen, die beim $i = 1, \dots, n$ -ten Wurf angeben, ob eine 6 gewürfelt wurde ($X_i = 1$). Es greift das Prinzip der Normalapproximation. Sei dazu $X := \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p)$ die Gesamtzahl der 6en. Wegen $\mathbb{E}[X] = np = 30$ und $\sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{np(1-p)} = 5$ ist mit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(30 - \delta \leq X \leq 30 + \delta) &= \mathbb{P}(-\delta/5 \leq \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \leq \delta/5) \approx \mathbb{P}(-\delta/5 \leq Z \leq \delta/5) \\ &= \Phi(\delta/5) - \Phi(-\delta/5) = 2\Phi(\delta/5) - 1.\end{aligned}$$

Für $\delta = 5$ ist also $\mathbb{P}(25 \leq X \leq 35) \approx 2\Phi(1) - 1 \approx 0.6826$. 5

- (b) Für X eine reelle ZV mit endlicher Varianz und $\delta > 0$ ist

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \delta) \leq \text{Var}(X)/\delta^2. \quad \boxed{1}$$

Also ist für die ZV X aus der Aufgabenstellung

$$\mathbb{P}(|X - 30| \leq \delta) = 1 - \mathbb{P}(|X - 30| > \delta) \geq 1 - \mathbb{P}(|X - 30| \geq \delta) \geq 1 - 25/\delta^2. \quad \boxed{1}$$

Damit ergibt sich

$$1 - 25/\delta^2 \geq 0.96 \Leftrightarrow 25/\delta^2 \leq 0.04 \Leftrightarrow 5/\delta \leq 0.2 \Leftrightarrow \delta \geq 25.$$

Der gesuchte Wert ist also $\hat{\delta} = 25$. 1

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Wir betrachten die durch $\lambda > 0$ parametrisierten Dichtefunktionen

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x^{\lambda-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

einer reellwertigen Zufallsvariablen. Verwenden Sie die Maximum-Likelihood Methode um den Parameter $\lambda > 0$ zu schätzen.

Lösung: Die Likelihood-Funktion lautet

$$L((x_1, \dots, x_n), \lambda) = \lambda^n \prod_{i=1}^n (x_i)^{\lambda-1} \quad \boxed{1}$$

Somit ergibt sich als Loglikelihoodfunktion

$$\ln L(x, \lambda) = n \ln \lambda + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i. \quad \boxed{1}$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(x, \lambda) = \frac{n}{\lambda} + \sum_{i=1}^n \ln x_i \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda \stackrel{!}{=} -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}. \quad \boxed{1}$$

Bei $M(X) := \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{X_i}}$ handelt sich tatsächlich um das globale Maximum, da die zweite Ableitung $-n/\lambda^2 < 0$ für alle $\lambda > 0$ ist. $\boxed{1}$

Aufgabe 7 (6 Punkte)

- (a) Sei X_1, \dots, X_{100} eine mathematische Stichprobe vom Umfang 100 zur Grundgesamtheit X . Dabei ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 > 0$. Testen Sie die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 4$ gegen $H_1 : \mu < 4$, wenn bei der Stichprobe der empirische Mittelwert $\bar{X} := \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i = 3.9$ gemessen wurde und

(i) die Varianz $\sigma^2 := 0.25$ beträgt.

(ii) die Varianz unbekannt ist und anhand der Stichprobe auf $S^2 := \frac{1}{99} \sum_{i=1}^{100} (X_i - 3.9)^2 = 0.49$ geschätzt wird.

Dabei sei die Beschränkung der Fehlerwahrscheinlichkeit auf $\alpha := 5\%$ für das fälschliche Ablehnen von H_0 vorgegeben.

- (b) Aus den Messungen der Wärmeleitfähigkeit von 16 Glasfaserplatten einer bestimmten Stärke ergab sich der Mittelwert $\bar{x} = 17.1$ und der Wert $s^2 = 0.36$. Unter der Annahme, die Messwerte seien unabhängig und normalverteilt gebe man ein Konfidenzintervall zum Niveau $\alpha = 0.1$ für den Erwartungswert μ der Wärmeleitfähigkeit an.

Hinweis: Einige α -Quantile $t_{n,\alpha}$ der studentschen t -Verteilung mit n Freiheitsgraden: $t_{15,0.9} \approx 1.341$, $t_{15,0.95} \approx 1.753$, $t_{16,0.9} \approx 1.337$, $t_{16,0.95} \approx 1.746$, $t_{17,0.9} \approx 1.333$, $t_{17,0.95} \approx 1.740$, $t_{99,0.9} \approx 1.2902$, $t_{99,0.95} \approx 1.6604$, $t_{100,0.9} \approx 1.290$, $t_{100,0.95} \approx 1.660$.

Lösung:

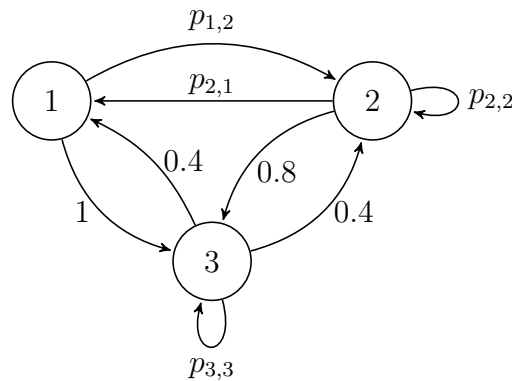
- (a) (i) Rezept 1: Gaußtest b). Teststatistik $Z := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{3.9 - 4}{\sqrt{0.25}} \sqrt{100} = -2$. 1 Das Ablehnungskriterium $Z < z_\alpha = -z_{1-\alpha} = -z_{0.95} \approx -1.6449$ ist also erfüllt. 1
- (ii) Rezept 2: t -Test b). Teststatistik $T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} = \frac{3.9 - 4}{\sqrt{0.49}} \sqrt{100} = -\frac{10}{7}$. 1 Das Ablehnungskriterium $T < t_{99,0.05} \approx -1.6604$ ist also nicht erfüllt. 1

- (b) Nach Satz 3.30 ist das gesuchte Konfidenzintervall

$$\begin{aligned} & (\bar{x} - t_{n-1, 1-\alpha/2} \cdot s / \sqrt{n}, \bar{x} + t_{n-1, 1-\alpha/2} \cdot s / \sqrt{n}) \\ & = (17.1 - 1.753 \cdot 0.6 / \sqrt{16}, 17.1 + 1.753 \cdot 0.6 / \sqrt{16}) = (16.8371, 17.363). \end{aligned} \quad \boxed{2}$$

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Betrachten Sie eine Markov-Kette $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf dem Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$ mit dem folgenden Übergangsgraphen.



Es gelte $p_{2,1} = p_{2,2}$.

- Bestimmen Sie die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten und stellen Sie die zugehörige Übergangsmatrix P auf.
- Beweisen oder widerlegen Sie: X ist ergodisch.
- Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X_{12} = 3 \mid X_{10} = 3)$.
- Bestimmen Sie die stationäre Verteilung der Markov-Kette und begründen Sie, ob diese eindeutig ist.

Lösung:

- Offenbar ist $p_{1,2} = 1 - 1 = 0$, $p_{3,3} = 1 - 0.4 - 0.4 = 0.2$ und aus $1 = 0.8 + p_{2,1} + p_{2,2}$ sowie $p_{2,1} = p_{2,2}$ folgt $p_{2,1} = p_{2,2} = 0.1$. 1 Die zugehörige Übergangsmatrix lautet folglich

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}. \quad \boxed{0.5}$$

- Zunächst ist X irreduzibel, da alle Zustände miteinander kommunizieren:

$$p_{1,2}^{(2)} \geq p_{1,3} \cdot p_{3,2} > 0, \quad p_{2,3} > 0, \quad p_{3,1} > 0. \quad \boxed{0.5}$$

Nach Vorlesung haben damit alle Zustände die gleiche Periode. Wegen $p_{2,2} > 0$ hat der Zustand 2 die Periode 1 und die gesamte Markovkette ist als aperiodisch erkannt.

1 Insgesamt folgt aus der Irreduzibilität und der Aperiodizität der Markovkette, dass diese ergodisch ist (per Definition, da der Zustandsraum endlich ist). 0.5

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{12} = 3 \mid X_{10} = 3) &= \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(X_{12} = 3, X_{11} = i \mid X_{10} = 3) \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(X_{12} = 3 \mid X_{11} = i) \cdot \mathbb{P}(X_{11} = i \mid X_{10} = 3) \\ &= 0.4 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.8 + .2^2 = 0.4 + 0.32 + 0.04 = 0.76.\end{aligned}$$

oder alternativ

$$\mathbb{P}(X_{12} = 3 \mid X_{10} = 3) = (P^2)_{3,3} = (0.4, 0.4, 0.2) \cdot (1, 0.8, 0.2)^T = .4 + .4 \cdot .8 + .2^2 = 0.76. \quad \boxed{1.5}$$

(d) Bekanntlich ist die stationäre Verteilung (die hier eindeutig ist, wegen der Ergodizität der endlichen Markov-Kette) α (aufgefasst als Zeilenvektor) Linkseigenvektor der Matrix P zum Eigenwert 1, d.h. $\alpha = \alpha P$. Folglich gilt es das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 10\alpha_1 \\ \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 10\alpha_2 \quad \boxed{1} \\ 10\alpha_1 + 8\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 10\alpha_3\end{aligned}$$

zu lösen. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir $\alpha_1 = \alpha_2$ und in die dritte Gleichung eingesetzt $18\alpha_1 = 8\alpha_3$. $\boxed{1}$ Da $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$ gelten muss (Verteilung), folgt, dass die stationäre Verteilung gegeben ist durch (aufgefasst als Zeilenvektor)

$$\alpha = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Ist $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, so zeigen die Werte der Tabelle $\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Beispielsweise ist $\Phi(-0.12) = 1 - 0.5478 = 0.4522$.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Quantile der Standardnormalverteilung

Ist $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, so zeigen die Werte der Tabelle $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$. Beispielsweise ist $z_{0.1} = -1.2816$.

α	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
z_α	1.2816	1.6449	1.9600	2.3264	2.5758

Weitere Bearbeitung von Aufgabenteil:

Weitere Bearbeitung von Aufgabenteil:

Weitere Bearbeitung von Aufgabenteil:

Weitere Bearbeitung von Aufgabenteil: